第26卷 第5期
2009年10月

工 程 数 学 学 报
CHINESE JOURNAL OF ENGINEERING MATHEMATICS

Vol. 26 No. 5
Oct. 2009

文章编号:1005-3085(2009)05-0917-05

一类 n 阶方程边值问题解的存在性*

魏 乙[1,2], 刘立山[1], 田 凯[1]

(1- 曲阜师范大学数学科学学院，曲阜 273165； 2- 济宁技术学院基础部，济宁 272013)

摘 要: 本文在假设满足 L_p-Carathéodory 条件下，利用 Leray-Schauder 连续定理研究了一类 n 阶三点边值问题解的存在性，并且给出了两个相应的例子来说明本文的结果。

关键词: n 阶方程边值问题；L_p-Carathéodory 条件；Leray-Schauder 连续定理；全连续算子

分类号: **AMS**(2000) 34B15; 34B25　　**中图分类号**: O175.8　　**文献标识码**: A

1 引言

本文我们研究下面 n 阶三点边值问题解的存在性

$$\begin{cases} u^{(n)}(t) = f\big(t, u(t), u'(t), \cdots, u^{(n-1)}(t)\big), & a.e.\ t \in (0,1), \\ u(0) = u'(0) = \cdots = u^{(n-2)}(0) = 0, & \alpha u(\eta) = u(1), \end{cases} \tag{1}$$

其中 $0 < \eta < 1$，$\alpha\eta^{n-1} \neq 0,\ 1$，$f : [0,1] \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ 满足 L_p-Carathéodory 条件，$1 \leq p < \infty$。

近年来，大家对边值问题解的存在性问题产生了浓厚的兴趣，并得出了很多好的结果[1-3]。在文 [1] 中，作者利用 Leray-Schauder 连续定理研究了一类三阶边界值问题解的存在性。在文 [2] 中，作者利用 Krasnoselkii-Guo 不动点定理研究了一类 n 阶边界值问题正解的存在性。受以上文章的启发，本文利用 Leray-Schauder 连续定理研究了边值问题 (1) 解的存在性。

2 引理及预备知识

定义 2.1[1] 如果 $f : [0,1] \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$，$1 \leq p < \infty$ 满足下面的条件，我们就说 f 满足 L_p-Carathéodory 条件。

(i) 对任意 $z \in \mathbf{R}^n$，映射 $t \to f(t,z)$ 是 Lebesgue 可测的；

(ii) 对于 $a.e.\ t \in [0,1]$，映射 $z \to f(t,z)$ 在 $\mathbf{R}^n$ 上是连续的；

(iii) 对任意 $r > 0$，存在 $\alpha_r \in L_p[0,1]$，使得对 $a.e.\ t \in [0,1]$ 和任意 $|z| \leq r$，有 $|f(t,z)| \leq \alpha_r(t)$。

定义 $AC[0,1]$ 是区间 [0,1] 上绝对连续函数的全体组成的空间。对于 $1 \leq p < \infty$，我们引入 Sobolev 空间 $W^{n,p}[0,1] = \{u \mid u, \cdots, u^{(n-1)} \in AC[0,1]$，$u$ 满足 (1) 的边值条件，且 $u^{(n)} \in L_p[0,1]\}$。令 $X = C^{n-1}[0,1]$，范数定义为

$$\|u\| = \max\left\{\|u\|_\infty, \|u'\|_\infty, \cdots, \|u^{(n-1)}\|_\infty\right\},$$

收稿日期: 2007-12-10. **作者简介**: 魏乙 (1980年5月生)，男，硕士. 研究方向：非线性泛涵分析.

***基金项目**: 国家自然科学基金 (10771117)；高等学校博士点专项基金 (20060446001).

其中

$$\|u\|_\infty = \sup_{t\in[0,1]} |u(t)|.$$

$Z = L_p[0,1]$ 的范数为通常的 $\|\cdot\|_p$。若 $u \in W^{n,p}[0,1]$ 且满足 (1)，则称 u 为边值问题 (1) 的解。

引理 2.1[4] 令 E 是 Banach 空间，$A: E \to E$ 是全连续算子。如果集合 $\{x \in E \mid x = \lambda Ax,\ 0<\lambda<1\}$ 是有界的，则 A 在 E 的闭球 T 中必有不动点，这里

$$T = \big\{x \in E \mid \|x\| \le R\big\},\quad R = \sup\big\{\|x\| \mid x \in E,\ x = \lambda Ax,\ 0<\lambda<1\big\}.$$

引理 2.2[2] 令

$$G_0(t,s) = \begin{cases} \dfrac{a(\eta;s)t^{n-1}}{(n-1)!}, & 0 \le t \le s \le 1, \\[2mm] \dfrac{a(\eta;s)t^{n-1} + (t-s)^{n-1}}{(n-1)!}, & 0 \le s \le t \le 1, \end{cases}$$

其中

$$\begin{cases} a(\eta;s) = -\dfrac{(1-s)^{n-1}}{1-\alpha\eta^{n-1}}, & \eta \le s, \\[2mm] a(\eta;s) = -\dfrac{(1-s)^{n-1} - (\eta-s)^{n-1}}{1-\alpha\eta^{n-1}}, & s \le \eta. \end{cases}$$

则问题 (1) 有唯一的解

$$u(t) = \int_0^1 G_0(t,s) f(s, u(s), \cdots, u^{(n-1)}(s))\mathrm{d}s.$$

3 主要结果

定理 3.1 假设 $f: [0,1]\times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ 满足 L_p-Carathéodory 条件，其中 $p>1$，并且存在函数 α_i，$\beta \in L_p[0,1]$ $(i=0,1,\cdots,n-1)$，使得

$$|f(t,z_0,z_1,\cdots,z_{n-1})| \le \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i(t)|z_i| + \beta(t), \quad a.e.\ t \in [0,1], \tag{2}$$

$$\sum_{i=0}^{n-1} A_i \|\alpha_i\|_p < 1, \tag{3}$$

其中

$$A_i = \frac{\left\{\int_0^1 \left[(1-s)^{n-1} + |1-\alpha\eta^{n-1}|(1-s)^{n-i-1}\right]^{\frac{p}{p-1}} \mathrm{d}s\right\}^{\frac{p-1}{p}}}{(n-i-1)!|1-\alpha\eta^{n-1}|}, \quad i = 0,1,\cdots,n-1. \tag{4}$$

则边界值问题 (1) 至少有一个解。

证明 定义映射 $T: X \to X$ 如下

$$Tu(t) = \int_0^1 G_0(t,s) f(s,u(s),u'(s),\cdots,u^{(n)}(s))\mathrm{d}s, \quad t \in [0,1].$$

由引理 2.2，我们得出

$$u(t) = \int_0^1 G_0(t,s) u^{(n)}(s)\mathrm{d}s.$$

我们令

$$G_i(t,s)=\begin{cases}\dfrac{a(\eta;s)t^{n-i-1}}{(n-i-1)!}, & 0\le t\le s\le 1,\quad i=1,2,\cdots,n-1,\\[2mm] \dfrac{a(\eta;s)t^{n-i-1}+(t-s)^{n-i-1}}{(n-i-1)!}, & 0\le s\le t\le 1,\quad i=1,2,\cdots,n-1.\end{cases}\tag{5}$$

由引理 2.2 和 (5) 式，得到关系式

$$u^{(i)}(t)=\int_0^1 G_i(t,s)u^{(n)}(s)\mathrm{d}s,\quad i=0,1,\cdots,n-1,\quad t\in[0,1].$$

由 Hölder 不等式，对任意 $t\in[0,1]$ 可得

$$\begin{aligned}\left|u^{(i)}(t)\right| &\le \int_0^1 \left|G_i(t,s)\right|\left|u^{(n)}(s)\right|\mathrm{d}s\\ &\le \left\|G_i(t,\cdot)\right\|_q\left\|u^{(n)}\right\|_p,\quad \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1,\quad i=0,1,\cdots,n-1.\end{aligned}\tag{6}$$

由 (6) 式得

$$\|u^{(i)}\|_\infty\le\max_{t\in[0,1]}\|G_i(t,\cdot)\|_q\|u^{(n)}\|_p,\quad i=0,1,\cdots,n-1.$$

令

$$a(s)=\frac{(1-s)^{n-1}}{|1-\alpha\eta^{n-1}|},\quad s\in[0,1].$$

则易知 $|a(\eta;s)|\le a(s)$，$s\in[0,1]$，$0<\eta<1$。由 (5) 式得

$$|G_i(t,s)|\le\begin{cases}\dfrac{a(s)t^{n-i-1}}{(n-i-1)!}, & 0\le t\le s\le 1,\quad i=0,1,\cdots,n-1,\\[2mm] \dfrac{a(s)t^{n-i-1}+(t-s)^{n-i-1}}{(n-i-1)!}, & 0\le s\le t\le 1,\quad i=0,1,\cdots,n-1.\end{cases}\tag{7}$$

令

$$\begin{aligned}A_i^q &= \max_{t\in[0,1]}\Big\{\int_0^t\Big[\frac{a(s)t^{n-i-1}+(t-s)^{n-i-1}}{(n-i-1)!}\Big]^q\mathrm{d}s\\ &\quad+\int_t^1\Big[\frac{a(s)t^{n-i-1}}{(n-i-1)!}\Big]^q\mathrm{d}s\Big\},\quad i=0,1,\cdots,n-1.\end{aligned}$$

由 (7) 式知

$$\max_{t\in[0,1]}\|G_i(t,\cdot)\|_q^q=\max_{t\in[0,1]}\int_0^1|G_i(t,s)|^q\mathrm{d}s\le A_i^q,\quad i=0,1,\cdots,n-2.$$

令

$$\begin{aligned}\varphi_i(t) &= \int_0^t\Big[\frac{a(s)t^{n-i-1}+(t-s)^{n-i-1}}{(n-i-1)!}\Big]^q\mathrm{d}s\\ &\quad+\int_t^1\Big[\frac{a(s)t^{n-i-1}}{(n-i-1)!}\Big]^q\mathrm{d}s,\quad i=0,1,\cdots,n-2,\end{aligned}\tag{8}$$

对 (8) 式两边求导数，得 $\varphi_i'(t) \geq 0$ $(i = 0, 1, \cdots, n-2)$。故得

$$\max_{t\in[0,1]} \varphi_i(t) = \varphi_i(1), \quad i = 0, 1, \cdots, n-2.$$

因此得到 A_i $(i = 0, 1, \cdots, n-2)$ 的表达式。下面计算 A_{n-1}，令

$$\varphi_{n-1}(t) = \int_0^t \Big[\frac{(1-s)^{n-1}}{|1-\alpha\eta^{n-1}|} + 1\Big]^q \mathrm{d}s + \int_t^1 \Big[\frac{(1-s)^{n-1}}{|1-\alpha\eta^{n-1}|}\Big]^q \mathrm{d}s, \tag{9}$$

对 (9) 式两边求导数，得 $\varphi_{n-1}'(t) \geq 0$，再由 (9) 式，得

$$\max_{t\in[0,1]} \varphi_{n-1}(t) = \varphi_{n-1}(1),$$

从而得到 A_{n-1} 的表达式。因此

$$\|u^{(i)}\|_\infty \leq A_i \|u^{(n)}\|_p, \quad i = 0, 1, \cdots, n-1. \tag{10}$$

类似 [1] 中引理 2.7 的证明，易知映射 $T: X \to X$ 是全连续算子。对于 $\lambda \in [0,1]$，考虑

$$u^{(n)}(t) = \lambda f\big(t, u(t), u'(t), \cdots, u^{(n)}(t)\big), \quad a.e.\ t \in (0,1).$$

对于 $u \in W^{n,p}[0,1]$，由 (2) 式及 (10) 式，得

$$\big\|u^{(n)}\big\|_p = \lambda \big\|f\big(t, u(t), u'(t), \cdots, u^{(n)}(t)\big)\big\|_p \leq \sum_{i=0}^{n-1} A_i \|\alpha_i\|_p \|u^{(n)}\|_p + \|\beta\|_p. \tag{11}$$

由条件 (3) 式，得

$$\|u^{(n)}\|_p \leq \frac{\|\beta\|_p}{1 - \sum\limits_{i=0}^{n-1} A_i \|\alpha_i\|_p}.$$

又因为 $\|u\| \leq \max\{A_0, A_1, \cdots, A_{n-1}\}\|u^{(n)}\|_p$。所以由引理 2.1 知 T 有一个不动点，从而易知边界值问题 (1) 在 $W^{n,p}[0,1]$ 中有一个解。故证毕。

定理 3.2 假设 $f: [0,1] \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ 满足 L_1-Carathéodory 条件，并且存在函数 α_i，$\beta \in L_1[0,1]$ $(i = 0, 1, \cdots, n-1)$，使得 (2) 成立，而且下式成立

$$\sum_{i=0}^{n-1} B_i \|\alpha_i\|_p < 1, \tag{12}$$

其中

$$B_i = \frac{1 + |1-\alpha\eta^{n-1}|}{(n-i-1)!\,|1-\alpha\eta^{n-1}|}, \quad i = 0, 1, \cdots, n-1, \tag{13}$$

则边界值问题 (1) 至少有一个解。

证明 对于任意 $t \in [0,1]$，我们有

$$\begin{aligned} |u^{(i)}(t)| &\leq \int_0^1 |G_i(t,s)||u^{(n)}(s)|\mathrm{d}s \\ &\leq \frac{t^{n-i-1}(1 + |1-\alpha\eta^{n-1}|)\|u^{(n)}\|_1}{(n-i-1)!\,|1-\alpha\eta^{n-1}|}, \quad i = 0, 1, \cdots, n-1, \end{aligned}$$

因此 $\|u^{(i)}\|_\infty \le B_i\|u^{(n)}\|_1$ $(i=0,1,\cdots,n-1)$。对于 $u\in W^{n,p}[0,1]$，由 (12)-(13) 利用 (11) 式同理可得

$$\|u^{(n)}\|_1 \le \sum_{i=0}^{n-1} B_i\|\alpha_i\|_1\|u^{(n)}\|_1 + \|\beta\|_1.$$

所以类似定理 3.1 可以证明定理 3.2 成立。

4 例子

例 4.1 考察下面四阶三点边值问题

$$\begin{cases} y^{(4)} = \dfrac{y\sqrt{t}\sin t}{2\sqrt{t^2+1}} - t\cos^2 y' + \dfrac{1}{6}\mathrm{e}^{-t}y'' - \dfrac{1}{3}t^2\sin^2 y''' + t(1+t), \\ y(0)=y'(0)=y''(0)=0, \quad \frac{3}{2}y\left(\frac{2}{3}\right)=y(1), \end{cases} \tag{14}$$

易知问题 (14) 满足定理 3.1 的所有条件。因此边界值问题 (14) 至少有一个解。

例 4.2 考察下面四阶三点边值问题

$$\begin{cases} y^{(4)} = \dfrac{yt\cos t}{t^2+1} - t^3\sin^2 y' + \dfrac{1}{4}\mathrm{e}^{-3t}y'' - \dfrac{1}{2}t^5\cos^2 y''' + t^2(1+t^2), \\ y(0)=y'(0)=y''(0)=0, \quad \frac{3}{2}y\left(\frac{2}{3}\right)=y(1), \end{cases} \tag{15}$$

易知问题 (15) 满足定理 3.2 的所有条件。因此知边界值问题 (15) 至少有一个解。

参考文献：

[1] Hopkins B, Kosmatov N. Third-order boundary value problems with sign-changing solutions[J]. Nonlinear Analysis, 2007, 67: 126-137

[2] Eloe P W, Ahmad B. Positive solutions of a nonlinear nth order boundary value problem with nonlocal conditions[J]. Applied Mathematics Letters, 2005, 18: 521-527

[3] Liu B M, Liu L S, Wu Y H. Positive solutions for singular second order three-point boundary value problems[J]. Nonlinear Analysis, 2007, 66: 2756-2766

[4] 郭大钧. 非线性泛函分析[M]. 济南：山东科学技术出版社，第二版，2001

The Existence of Solution for a Class of n-order Boundary Value Problems

WEI Yi[1,2], LIU Li-shan[1], TIAN Kai[1]

(1- School of Mathematical Sciences, Qufu Normal University, Qufu 273165;
2- Basis Department, Jining Institute of Technology, Jining 272013)

Abstract: We discuss the three point boundary value problems for a class of n-order differential equations and obtain the existence of at least one solution by using the Leray-Schauder continuation principle. Two examples are given to demonstrate the main results of this paper.

Keywords: n-order boundary value problem; L_p-Carathéodory condition; Leray-Schauder continuation principle; completely continuous operator